1. FICHA 2: Cálculo de límites. Soluciones.

Cuestión 1: Determina razonadamente el valor de los siguientes límites:

$$a. \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^4+x^2-x-1}{x^3-x^2+x-1} \qquad b. \quad \lim_{x\to 2} \frac{2x-\sqrt{4x+8}}{x^2-4}$$

$$c. \quad \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x+3}-x}{x^2-3x} \qquad d. \quad \lim_{x\to -1} \frac{1-2x}{x^2-1}$$

$$e. \quad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x^2-1}$$

Solución:

(a) Se trata de una *indeterminación del tipo* $\frac{0}{0}$.

Factorizamos numerador y denominador, que se pueden expresar en la forma:

$$p(x) = x^4+x^2-x-1 = (x-1)\cdot(x^3+x^2+2x+1)$$

$$q(x) = x^3-x^2+x-1 = (x-1)\cdot(x^2+1)$$

Por tanto, podremos escribir:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4+x^2-x-1}{x^3-x^2+x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cdot(x^3+x^2+2x+1)}{(x-1)\cdot(x^2+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}\cdot(x^3+x^2+2x+1)}{\cancel{(x-1)}\cdot(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2+2x+1}{x^2+1} = \boxed{\frac{5}{2}}$$

(b) Al sustituir la variable x por 2, se obtiene una *indeterminación del tipo* $\frac{0}{0}$.

En este caso, multiplicamos y dividimos la expresión por el conjugado del numerador, esto es:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x-\sqrt{4x+8}}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(2x-\sqrt{4x+8})\cdot(2x+\sqrt{4x+8})}{(x^2-4)\cdot(2x+\sqrt{4x+8})} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(2x)^2-(\sqrt{4x+8})^2}{(x^2-4)\cdot(2x+\sqrt{4x+8})} = \lim_{x\to 2} \frac{4x^2-4x-8}{(x+2)(x-2)\cdot(2x+\sqrt{4x+8})} =$$

y factorizando nuevamente la expresión cuadrática del numerador, tendríamos:

$$4x^2-4x-8 = 4(x^2-x-2) = 4(x-2)(x+1)$$

Por tanto,

$$= \lim_{x\to 2} \frac{4(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-2)\cdot(2x+\sqrt{4x+8})} = \lim_{x\to 2} \frac{4\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{(x-2)}(x+2)\cdot(2x+\sqrt{4x+8})} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{4(x+1)}{(x+2)\cdot(2x+\sqrt{4x+8})} = \frac{4\cdot 3}{4\cdot(4+\sqrt{16})} = \frac{\cancel{4}\cdot 3}{\cancel{4}\cdot(4+4)} = \boxed{\frac{3}{8}}$$

(c) Al sustituir la variable x por 3, se obtiene una *indeterminación del tipo* $\frac{0}{0}$.

En este caso, factorizamos el denominador y multiplicamos y dividimos la expresión por el conjugado del numerador, esto es:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x+3}-x}{x^2-3x} = \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{2x+3}-x)\cdot(\sqrt{2x+3}+x)}{x(x-3)\cdot(\sqrt{2x+3}+x)} = \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{2x+3})^2-x^2}{x(x-3)\cdot(\sqrt{2x+3}+x)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{2x+3-x^2}{x(x-3)\cdot(\sqrt{2x+3}+x)} = \lim_{x\to 3} \frac{-x^2+2x+3}{x(x-3)\cdot(\sqrt{2x+3}+x)}$$

Observamos que el numerador se puede factorizar en la forma:

$$p(x) = -x^2+2x+3 = -(x-3)\cdot(x+1)$$

por tanto el límite pedido es:

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-(x-3)\cdot(x+1)}{x(x-3)\cdot(\sqrt{2x+3}+x)} = \lim_{x\to 3} \frac{-\cancel{(x-3)}\cdot(x+1)}{x\cancel{(x-3)}\cdot(\sqrt{2x+3}+x)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-(x+1)}{x\cdot(\sqrt{2x+3}+x)} = \frac{-(3+1)}{3\cdot(\sqrt{9}+3)} = \frac{-4}{3\cdot 6} = \frac{-4}{18} = \boxed{\frac{-2}{9}}$$

(d) Al sustituir la variable x por -1, se obtiene una expresión del tipo $\frac{a}{0}$, con $a \neq 0$, cuyo valor sabemos que es *infinito.* Debemos calcular los límites laterales en $x = -1$ para determinar el signo de este valor infinito, en cada caso.

Para el **límite lateral por la derecha** en $x = -1$ escribiremos:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1, x>-1} \frac{1-2x}{x^2-1} = \frac{3}{0^-} = \boxed{-\infty}$$

Para el **límite lateral por la izquierda** en $x = -1$ escribiremos:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1, x<-1} \frac{1-2x}{x^2-1} = \frac{3}{0^+} = \boxed{+\infty}$$

En este caso, podemos afirmar que la función posee en $x = -1$ una *asíntota vertical.*

(e) Se trata de una *indeterminación del tipo* $\frac{0}{0}$, que tratamos de resolver multiplicando y dividiendo dicha expresión por el conjugado del numerador, esto es:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{(x^2-1)\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{2})^2}{(x-1)(x+1)\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)-2}{(x^2-1)\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{2})}=\boxed{\frac{1}{4\sqrt{2}}}$$

Cuestión 2: Determina el valor de los siguientes límites, cuando x tiende a $+\infty$ y cuando x tiende a $-\infty$, indicando previamente el tipo de indeterminación:

$a.\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^4+3x^2+2}{5x^2+4}$ $\qquad$ $b.\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2}{x+2}-\frac{4x^3}{x-2}\right)$

$c.\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1+x^2}\cdot\left(\frac{x^2+1}{3x}-2\right)$ $\qquad$ $d.\ \lim_{x\to\infty}\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}$

$e.\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{2x+3}$ $\qquad$ $f.\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{8x^3-2x+3}}{\sqrt{3x^2-3x+5}}$

Solución:

(a) Se trata de una *indeterminación del tipo* $\frac{\infty}{\infty}$.

Comparando grados, es fácil obtener que

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4+3x^2+2}{5x^2+4}=+\infty$$

Una manera de probar ésto, consiste en quedarnos con las potencias de mayor grado en el numerador y el denominador de la expresión, en cuyo caso, escribiríamos:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4+3x^2+2}{5x^2+4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4}{5x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{5}=\boxed{+\infty}$$

(b) Se trata de una *indeterminación del tipo* $\infty-\infty$.

Operamos las fracciones algebraicas, hasta obtener una única expresión racional,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2}{x+2}-\frac{4x^3}{x-2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3-8x^2-4x^4-8x^3}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-4x^4-4x^3-8x^2}{x^2-4}\right)=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x^4}{x^2} = \lim_{x\to\infty} -4x^2 = \boxed{-\infty}$$

(c) Se trata de una *indeterminación del tipo* $0 \cdot \infty$.

Operamos las fracciones algebraicas, hasta obtener una única expresión racional,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1+x^2} \cdot \left(\frac{x^2+1}{3x} - 2 \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1+x^2} \cdot \left(\frac{x^2+1-6x}{3x} \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cancel{x}}{1+x^2} \cdot \left(\frac{x^2-6x+1}{3\cancel{x}} \right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-12x+2}{3x^2+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

(d) Se trata de una *indeterminación del tipo* $\infty - \infty$.

Multiplicamos y dividimos la expresión dada por su conjugado:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}) \cdot (\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x-2})^2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+2)-(x-2)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = \boxed{0}$$

al resultar una expresión del tipo

$$\frac{a}{\infty} \to 0$$

(e) Se trata de una *indeterminación del tipo* $\frac{\infty}{\infty}$.

Quedándonos con las potencias de mayor grado, tendríamos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}{2x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2x} = \boxed{1}$$

En cambio, el resultado es distinto cuando x tiende a $-\infty$. En efecto,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}{2x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{(-x)^2} + \sqrt{(-x)^2}}{2(-x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+x}{-2x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2x}{2x} = \boxed{-1}$$

obteniendo por tanto un valor distinto.

(f) Se trata de una *indeterminación del tipo* $\frac{\infty}{\infty}$.

Quedándonos con las potencias de mayor grado, tendríamos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt[3]{8x^3-2x+3}}{\sqrt{3x^2-3x+5}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{8x^3}}{\sqrt{3x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+2x}{\sqrt{3}x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3\cdot\cancel{x}}{\sqrt{3}\cdot\cancel{x}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \boxed{\sqrt{3}}$$

Cuestión 3: Calcula los siguientes límites:

$$a.\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}} \qquad\qquad b.\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^{\frac{4x}{1+x^2}}$$

$$c.\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{2x^2}{1+x}} \qquad\qquad d.\quad \lim_{x\to 0}\left(1+sen(x)\right)^{cotag(x)}$$

$$e.\quad \lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2+3x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{2}{1+x}} \qquad\qquad f.\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2^x+3^x}{3^x}\right)^{\pi^x}$$

Solución:

En principio, en todos los apartados parece que se obtiene una indeterminación del tipo $1^{\pm\infty}$*, que se resuelve mediante la equivalencia:*

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\cdot(f(x)-1)}}$$

siendo $a \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. También se puede indicar en la forma

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^b, \qquad \textit{siendo} \qquad b = \lim_{x\to a} g(x)\cdot(f(x)-1)$$

(a) Aplicando la equivalencia previa, tendremos:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}\cdot(1+x-1)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}} = \boxed{e^2}$$

(b) Calculando primero el valor del exponente, escribiríamos:

$$b = \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{1+x^2}\cdot\left(\frac{3x+1}{3x-1}-1\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{1+x^2}\cdot\left(\frac{3x+1-3x+1}{3x-1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{1+x^2}\cdot\left(\frac{2}{3x-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{8x}{(1+x^2)(3x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{8x}{3x^3-x^2+3x-1} =$$

(quedándonos con los monomios de mayor grado)

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{8x}{3x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{8}{3x^2} = \frac{8}{\infty} = 0$$

Por tanto, el límite pedido es:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^{\frac{4x}{1+x^2}} = e^0 = \boxed{1}$$

NOTA: *Hay que llevar cuidado cuando se aplican las técnicas estudiadas de resolución de indeterminaciones. Lo anterior* ***no es necesario!*** *Si la base tiende a 1 y* *el exponente tiende a cero,* ***no resulta ninguna indeterminación*** *y por tanto no se puede aplicar la fórmula descrita al principio del ejercicio. El valor en efecto da uno, pero porque* $1^0 = 1$*.*

(c) Comprobamos que en efecto es una indeterminación del tipo 1^∞.Calculando análogamente el valor del exponente, escribiríamos:

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{1+x} \cdot \left(\frac{x^2+3x+1}{x^2+1} - 1 \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{1+x} \cdot \left(\frac{\cancel{x^2}+3x\cancel{+1}\cancel{-x^2}\cancel{-1}}{x^2+1} \right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{1+x} \cdot \left(\frac{3x}{x^2+1} \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{6x^3}{(1+x)\cdot(x^2+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x^3}{x^3+x^2+x+1} =$$

(quedándonos con las potencias de mayor grado)

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{6x^3}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{6\cdot\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} = 6$$

Por tanto el límite pedido es:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+3x+1}{x^2+1} \right)^{\frac{2x^2}{1+x}} = \boxed{e^6} \approx 403{,}4287935...$$

(d) Se observa que en efecto se trata de una *indeterminación del tipo* 1^∞.

Calculando el límite del exponente,

$$b = \lim_{x\to 0} cotag(x)\cdot(1+sen(x)-1) = \lim_{x\to 0} \frac{cos(x)}{sen(x)} \cdot sen(x) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{cos(x)}{\cancel{sen(x)}} \cdot \cancel{sen(x)} = \lim_{x\to 0} cos(x) = cos(0) = 1$$

Por tanto el límite pedido es:

$$\lim_{x\to\infty} (1+sen(x))^{cotag(x)} = e^1 = \boxed{e} \approx 2{,}718281828......$$

(d) En este caso *no se obtiene una indeterminación como las anteriores!*

Al sustituir $x = -1$ se obtiene en la base la fracción $\frac{-1}{2}$, mientras que el exponente tiende a infinito.

Esto nos obliga a distinguir dos casos:

1) Si $x \to -1^+$ (donde el exponente tiende a $+\infty$).

2) Si $x \to -1^{-1}$ (el exponente tiende a $-\infty$).

Debemos hacerlo así, ya que como es sabido, si $0 < a < 1$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = a^{+\infty} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = a^{-\infty} = +\infty$$

Además debemos tener en cuenta que

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{2}{1+x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-1^-} \frac{2}{1+x} = -\infty$$

Con todo, los límites laterales son:

$$\lim_{x\to-1^+} \left(\frac{x^2+3x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{2}{1+x}} = \left(\frac{-1}{2}\right)^{+\infty} = \boxed{0}$$

$$\lim_{x\to-1^-} \left(\frac{x^2+3x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{2}{1+x}} = \left(\frac{-1}{2}\right)^{-\infty} = (-2)^{+\infty} = \boxed{\pm\infty}$$

Observar que tanto la convergencia como la divergencia es *alternada*.

(e) Puesto que la base se puede expresar en la forma

$$f(x) = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

y $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$,se obtiene una indeterminación del tipo $1^{+\infty}$.

Calculando el límite del exponente, tendremos:

$$b = \lim_{x\to+\infty} \pi^x \cdot \left(1 + \frac{2^x}{3^x} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} \pi^x \cdot \frac{2^x}{3^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2\pi}{3}\right)^x = +\infty$$

al ser $a = \frac{2\pi}{3} > 1$. Por consiguiente, el límite pedido es:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2^x+3^x}{3^x}\right)^{\pi^x} = e^{+\infty} = \boxed{+\infty}$$

Cuestión 4: Determina el valor de los siguientes límites:

$$a.\ \lim_{x\to\infty} \frac{ln(1+x)}{x} \qquad b.\ \lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{3^x} \qquad c.\ \lim_{x\to\infty} \frac{ln^2(x)}{x^3} \qquad d.\ \lim_{x\to\infty} \frac{ln(1+x)}{e^x}$$

$$e.\ \lim_{x\to\infty} \frac{2^x+3^x}{5^x} \qquad f.\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{10^x} \qquad g.\ \lim_{x\to\infty} x\cdot e^x \qquad h.\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{ln(x)}$$

Solución:

En todos los apartados se debe calcular el límite cuando x tiende a $+\infty$, y cuando x tiende a $-\infty$. El criterio de comparación de infinitos es:

$$\boxed{log_a(x) << x^n << a^x}$$

con $a > 1$.

Soluciones cuando $x \to +\infty$:

a	b	c	d	e	f	g	h
0	0	0	0	0	0	$+\infty$	$+\infty$

Soluciones cuando $x \to -\infty$:

a	b	c	d	e	f	g	h
$\nexists$	$+\infty$	$\nexists$	$\nexists$	$+\infty$	$+\infty$	0	$\nexists$

En los casos donde no existe el límite ($\nexists$), se debe a que no está definido el logaritmo de un número real para valores negativos. En este sentido

$$\nexists \lim_{x\to-\infty} log_a(x)$$

Observación: En general para calcular el límite de una función $y = f(x)$, cuando x tiende a $-\infty$, podemos seguir la regla siguiente:

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x)}$$

Anexo I: Algunos casos particulares de resolución de indeterminaciones

A continuación se detallan los procesos seguidos para la resolución de algunos límites propuestos en el aula. Recordemos que las indeterminaciones más importantes son:

$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad 0\cdot\infty, \qquad \infty-\infty, \qquad 1^{\pm\infty}, \qquad 0^0$$

Cada una de estas indeterminaciones se debe resolver con las técnicas estudiadas que mejor se adapten a cada caso. Se deben indicar todos los pasos seguidos en el proceso, usando la notación matemática con propiedad.

Cuestión a: *Calcular el valor del límite,*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x+3x}{3^x}$$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x+3x}{3^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{3^x} + \frac{3x}{3^x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}\right)^x + \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{3^{x-1}}\right) = 0$$

donde se han hecho uso de las propiedades generales:

$$Si \quad 0<a<1 \to \lim_{x\to+\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0, \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

Por tanto el límite pedido es 0.

Cuestión b: *Calcular el valor del límite,*

$$\lim_{x\to+1} \frac{x^3-1}{x^2+6x-7}$$

Solución: Al sustituir la variable independiente por $x=1$, obtenemos

$$\lim_{x\to+1} \frac{x^3-1}{x^2+6x-7} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

una indeterminación. Para resolverla factorizamos los polinomios del numerador y del denominador, obteniendo

$$x^3-1=(x-1)\cdot(x^2+x+1), \qquad x^2+6x-7=(x-1)\cdot(x+7)$$

Por tanto, podremos escribir:

$$\lim_{x\to+1} \frac{\cancel{(x-1)}\cdot(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}\cdot(x+7)} = \lim_{x\to+1} \frac{x^2+x+1}{x+7} = \frac{3}{8}$$

Cuestión c: *Calcular el valor del límite,*

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}, \qquad a>0$$

Solución: Al sustituir la variable independiente por $x=a$, obtenemos

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

una indeterminación. Para resolverla multiplicamos numerador y denominador por la expresión conjugada del numerador,

$$\overline{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\sqrt{x}+\sqrt{a}$$

obteniendo

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{a})^2}{(x-a)\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim_{x\to a}\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{2a}, \qquad \forall a>0$$

que es la solución esperada.

Cuestión d: *Calcular el valor del límite,*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}-(x-2)}{x-2}$$

Solución: Observamos que en el numerador se presenta una indeterminación del tipo $\infty-\infty$. Deberíamos multiplicar y dividir por el conjugado del numerador,

$$\overline{\sqrt{x^2-2x}-(x-2)}=\sqrt{x^2-2x}+(x-2)$$

No obstante, podemos efectuar la siguiente manipulación algebraica que nos conduce igualmente al resultado correcto.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}-(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-2}-\frac{x-2}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-2}-1$$

Ahora bien, el primer límite es sencillo de calcular, comparando grados o bien fijándonos exclusivamente en los monomios de mayor grado:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|}{x}=1$$

Por consiguiente el límite pedido es:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x}-(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-2} - 1 = 1 - 1 = 0$$

Cuestión e: *Calcular el valor del límite,*

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$$

Solución: Al sustituir el valor de la variable independiente $x = 0$, obtenemos una indeterminación del tipo

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}} = 1^{+\infty}$$

relacionada con el *número e.* Para resolver la indeterminación, aplicamos la conocida fórmula

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\cdot(f(x)-1)}$$

que en este caso, se traduce en,

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cdot(1+2x-1)} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{2x}{x}} = e^2$$

En definitiva,

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}} = e^2$$

Cuestión f: *Calcular el valor del límite,*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+3}{x}}$$

Solución: Observamos que se trata de una indeterminación del tipo $1^{+\infty}$. Operamos como el caso previo, aplicando la fórmula:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+3}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3}{x}\cdot\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}-1\right)} =$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3}{x}\cdot\left(\frac{x^2+x+1-x^2-1}{x^2+1}\right)} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot(x^2+3)}{x\cdot(x^2+1)}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3}{x^2+1}} = e^1 = e$$

donde en el último paso se han comparado grados en el exponente.

Cuestión g: *Calcular el valor del límite,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$$

Solución: Observamos que al sustituir el valor de la variable independiente, $x = 0$, obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

una indeterminación. En este caso, para resolver el límite, debemos multiplicar numerador y denominador por el conjugado del numerador, obteniendo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{3x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{3x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-(1-x)}{3x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{3\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \frac{2}{3\cdot\left(\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}\right)} = \frac{2}{3\cdot 2} = \frac{1}{3}$$

Cuestión h: *Determinar el valor de "a", para que el límite,*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(2x-\sqrt{4x^2+ax+1}\right) = 1$$

Solución: Observamos que el límite presenta una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Para resolverla, multiplicamos y dividimos la expresión dada, por su conjugado,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(2x-\sqrt{4x^2+ax+1}\right) \cdot \frac{2x+\sqrt{4x^2+ax+1}}{2x+\sqrt{4x^2+ax+1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(2x-\sqrt{4x^2+ax+1}\right)\cdot\left(2x+\sqrt{4x^2+ax+1}\right)}{2x+\sqrt{4x^2+ax+1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x)^2-\left(\sqrt{4x^2+ax+1}\right)^2}{2x+\sqrt{4x^2+ax+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2-(4x^2+ax+1)}{2x+\sqrt{4x^2+ax+1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-ax-1}{2x+\sqrt{4x^2+ax+1}}$$

Fijándonos en las potencias de mayor grado, dicho límite vale,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-ax-1}{2x+\sqrt{4x^2+ax+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-ax}{2x+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-ax}{4x} = -\frac{a}{4}$$

Si queremos que dicho límite valga 1, como se indica en el enunciado, plantemos la ecuación:

$$\boxed{\frac{-a}{4} = 1 \leftrightarrow a = -4}$$

que es la solución pedida.

Cuestión i: *Determinar el valor del límite,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{|x|}$$

Solución: En primer lugar debemos aplicar la definición de *valor absoluto,*

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Por tanto, la función dada $f(x) = \frac{sen(x)}{|x|}$, es una función a trozos que debe expresarse en la forma:

$$\frac{sen(x)}{|x|} = \begin{cases} \frac{sen(x)}{x} & si \quad x \geq 0 \\ -\frac{sen(x)}{x} & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Para calcular el límite cuando $x \to 0$, debemos calcular los límites laterales. El límite lateral por la derecha es:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{sen(x)}{|x|} = \lim_{x\to 0, x>0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

En cambio, el límite lateral por la izquierda sería:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{sen(x)}{|x|} = \lim_{x\to 0, x<0} -\frac{sen(x)}{x} = -1$$

Los límites laterales no coinciden, como se aprecia en la gráfica. Por consiguiente no existe el límite pedido.

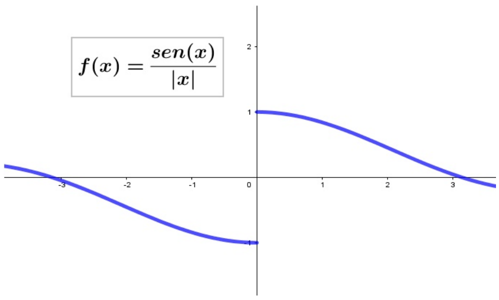

Figura 1: *Se observa que los límites laterales en $x = 0$ no coinciden.*